

Zusammenfassung der Sätze und Definitionen

zur von Prof. Wirths im WS 97/98 gehaltenen Vorlesung

Analysis für Informatiker I

September 1998

von Carsten F. Buschmann

mail@carsten-buschmann.com

Inhalt

| | |
|---|----|
| §1 Die angeordneten Körper \mathbb{R} und \mathbb{Q} | 3 |
| §2 Reelle Folgen | 4 |
| §3A Komplexe Zahlen | 5 |
| §3B Komplexe Folgen | 6 |
| §3C Komplexe Reihen | 7 |
| §3D Potenzreihen | 9 |
| §3E Z-Transformation | 10 |
| §4A Stetige und differenzierbare reelle und komplexe Funktionen | 11 |
| §4B Lineare Differentialgleichungen | 13 |
| §5A Kurvendiskussion reeller Folgen | 14 |
| §5B Stammfunktionen und Ableitungen | 15 |
| §6 Integration | 16 |

§1 Die angeordneten Körper IR und Q

Def 1.1 Gruppe:

G Menge mit einer Verknüpfung

1. Assoziativität: $(a * b) * c = a * (b * c)$
2. Existenz eines eindeutigen neutralen Elementes e: $a * e = e * a = a$
3. Existenz eines privaten inversen Elementes: $a * a^{-1} = e$
4. zusätzlich Kommutativität \Rightarrow abelsche (kom.) Gruppe

Def 1.2 Körper:

K Menge mit zwei Verknüpfungen +, *

1. $(K, +)$ ist abelsche Gruppe
2. $(K \setminus \{0\}, *)$ ist abelsche Gruppe
3. Distributivität: $a * (b + c) = a * b + a * c$

Def 1.3 angeordneter Körper:

$(K, +, *)$ Körper, $>, <$ Relationen

1. für je 2 Elemente gibt es genau 3 Beziehungen: $a < b, a > b, a = b$
2. Transitivität: $a < b, b < c \Rightarrow a < c$
3. Monotonie von + : $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4. Monotonie von * : $a < b, 0 < c \Rightarrow a * c < b * c$

Def 1.4 Rechnen mit Beträgen:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Folgerungen:

$$|a * b| = |a| * |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ Dreiecksungleichung u.v.m.}$$

Def 1.5 Beschränkung:

$M \neq \emptyset, M \subset \mathbb{Q}$ (IR)

M nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists a$ mit $x \leq a \forall x \in M$

M nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists a$ mit $x \geq a \forall x \in M$

M nach oben und unten beschränkt $\Leftrightarrow M$ beschränkt

Sup/Inf:

falls $a \notin M$:

a kleinste obere Schranke \Rightarrow a heißt Supremum

a größte untere Schranke \Rightarrow a heißt Infimum

Min/Max:

falls $a \in M \Rightarrow$ a heißt Minimum (und Supremum) / Maximum (und Infimum)

Satz 1.6 Vollständigkeitsaxiom:

Es gibt genau einen Körper IR, in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt:

$M \subset \mathbb{R} \neq \emptyset, M$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}$ mit $S = \text{Sup } M$

§ 2 Reelle Folgen

Def 2.1 eine **reelle Folge** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
ordnet jeder nat. Zahl n eine reelle Zahl a_n zu

$$M(a_n) = \{ p \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } p = a_n \}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\Leftrightarrow M(a_n)$ beschränkt

Def 2.2 **Häufungspunkte:**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folge

$h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ unendlich viele natürliche Zahlen n mit $|a_n - h| < \varepsilon$

Satz 2.3 **Häufungspunkte (von Bolzano-Weierstraß):**

Jede beschränkte reelle Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
 $H(a_n)$ sei die Menge der Häufungspunkte.

Def 2.4 **Limitees / Konvergenz:**

Max $H(a_n)$ heißt Limes superior

Min $H(a_n)$ heißt Limes inferior

Wenn $\liminf = \limsup = A$, heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und A
Grenzwert/Limes von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz 2.5 **Konvergenzkriterium:**

$\lim a_n = A \Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0 \exists$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - A| < \varepsilon$ für $n \geq N$

Satz **des Archimedes:**

zu jedem $\varepsilon > 0 \exists$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$

Satz **Bernoulli-Ungleichung:**

$$(1+c)^n \geq 1 + nc$$

Satz **Cauchy-Kriterium für Konvergenz:**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle konvergente Folge \Leftrightarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists$ ein $N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq N$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Satz **Monotonie und Beschränktheit**

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkte, monoton steigende reelle Folge \Rightarrow
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{Sup } M(a_n) = S$

Satz **Vergleichs- oder Zangenkriterium**

§ 3A Komplexe Zahlen

Def 3.1 Definition komplexer Zahlen

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad : \text{Betrag einer komplexen Zahl}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} \text{ oder } \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + i(-ad + bc)}{c^2 + d^2}$$

Def 3.2 $(\mathbb{C}, +, *)$ ist ein Körper

Satz 3.3 2 Wurzeln

zu jeder Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 mit

$$(z_k)^2 = z \quad k = 1, 2$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \cdot \operatorname{sgn} b \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi r}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi r}{n}\right) \right] \quad r = 0, 1, \dots, n-1$$

Def 3.4 Polynome in \mathbb{C} wie in \mathbb{R}

Satz Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad n hat n (nicht notwendig verschiedene Nullstellen)

Hat ein Polynom die Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit der Vielfachheit m , dann hat es auch die Nullstelle \bar{z}_0 mit der Vielfachheit m .

Def Polarkoordinaten

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Satz komplexer Betrag

$|z|$, $z \in \mathbb{C}$ ist der Abstand von z vom Nullpunkt
Rechnen wie üblich mit Beträgen

§ 3B komplexe Folgen

Def 3.5 komplexe Folgen

jede Abb. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \rightarrow a_n$ heißt komplexe Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$M(a_n) = \{ p \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } p = a_n \}$$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt} \Leftrightarrow M(a_n) \text{ beschränkt}$$

$h \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ unendlich viele natürliche Zahlen n mit $|a_n - h| < \varepsilon$

Satz 3.6 Häufungspunkte

Jede beschränkte komplexe Folge hat mindestens einen Häufungspunkt.
 $H(a_n)$ sei die Menge der Häufungspunkte.

Satz 3.7 Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + i\beta_n = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$$

Satz Rechenregeln für komplexe Folgen

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

Satz 3.8 Cauchysches Konvergenzkriterium:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte komplexe Folge \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ ein } N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Folgerung:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent \Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ ein } N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$$

§ 3C komplexe Reihen

Satz Geometrische Reihe in C

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1$$

Satz Reihenentwicklungen

$$\text{Für } |z| < |c| \quad \frac{1}{z - c} = \frac{1}{-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{c}} = -\frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{c}\right)^n$$

$$\frac{1}{z + c} = \frac{1}{z - (-c)} = \frac{1}{-(-c)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{-c}} = -\frac{1}{-c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{-c}\right)^n$$

$$\text{Für } |z| > |c| \quad \frac{1}{z - c} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c^n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$\frac{1}{z + c} = \frac{1}{z - (-c)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-c}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-c)^n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Def 3.9 Partialsommen

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexe Folge

$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ heißt Partialsomme

Konvergenz von Reihen:

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt konvergent gegen $S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

Satz Cauchy-Krit. für Reihen

Reihe konvergent \Leftrightarrow

$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ ein } N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N:$

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right|$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow a_n$ kann (muß aber nicht) konvergieren

Gegenteil

a_n gehen nicht gegen 0 \Rightarrow Reihe divergiert

Satz Dreiecksungleichung bei Reihen

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent (aber nicht umgekehrt!)}$$

Satz Majoranten-Kriterium

gilt für $k \geq N$ $|a_k| \leq c_k$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent, dann konvergiert auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{Majorante: } \sum_{k=0}^{\infty} c q^k \quad c > 0, q \in (0, 1)$$

Satz 3.10 Wurzelkriterium

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergieren}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \text{ existiert und } < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergieren}$$

Def Exponentialfunktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z) = e^z \text{ heißt Exponentialfunktion (konvergent für alle } z)$$

Satz 3.11 Cauchy-Produkt von Reihen

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \right) \left(\sum_{l=0}^N b_l \right) = \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{k+l=n} a_k b_l \quad 0 < k, l \leq N$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & AB & 0 \end{matrix}$$

Def 3.12 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, k = 0, \dots, n$$

heißt Binomialkoeffizient (n über k) und ist die Anz. der Möglichkeiten, aus n Dingen k Dinge verschieden auszuwählen.

Satz Binomischer Lehrsatz

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

Satz Additionstheorem der Exponentialfunktion

$$\exp(w) \cdot \exp(z) = \exp(w + z) = e^w e^z = e^{w+z}$$

§ 3D Potenzreihen

Def 3.13 Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad c_k \in \mathbb{C} \text{ Koeffizienten, } z_0 \in \mathbb{C} \text{ Entw.pkt., } z \in \mathbb{C} \text{ Variable}$$

heißt Potenzreihe

Konvergenzradius

$$|z - z_0| < R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

Satz Eulersche Formel

kompl. Exponentialfkt. $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x (e^{iy})$

Satz Sinus- und Kosinusreihe

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}$$

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Satz Additionstheoreme in \mathbb{C}

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

§ 3E Z-Transformation

Satz Z-Transformation

$$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \xrightarrow{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n}{z^n} = F(z)$$

$$Y_n = 0 \xrightarrow{z} F(z) \equiv 0$$

$$Y_n = 1 \xrightarrow{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \text{ für } |z| > 1$$

$$Y_n = a_n \in \mathbb{C} \xrightarrow{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a} \text{ für } |z| > |a|$$

$$Y_n = (n+1)a^n \xrightarrow{z} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^n}{z^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{z}\right)^2} = \frac{z^2}{(z-a)^2} \text{ für } |z| > |a|$$

Satz Verschiebungssatz

$$(Y_{n+k})_{n \in \mathbb{N}_0} \xrightarrow{z} \left[F(z) - \left(Y_0 + \frac{Y_1}{z} + \dots + \frac{Y_{k-1}}{z^{k-1}} \right) \right] z^k$$

Satz Char. Polynom

$$Y_{n+k} + \alpha_{k-1} Y_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 Y_n = 0$$

$$z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

n_r Basisfolgen zu einer reellen Nst. t_r mit Vielfachheit n_r :

$$\left((t_r)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left((n+1)t_r^n \right)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, \left(\binom{n+n_r-1}{n_r-1} t_r^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$2m_s$ Basisfolgen zu den kompl. Nst. z_s, z_s^* mit Vielfachheit m_s :

$$\left(\operatorname{Re}(z_s^n) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\operatorname{Im}(z_s^n) \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$\left((n+1) \operatorname{Re}(z_s^n) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left((n+1) \operatorname{Im}(z_s^n) \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$\dots,$$

$$\left(\binom{n+m_s-1}{m_s-1} \operatorname{Re}(z_s^n) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\binom{n+m_s-1}{m_s-1} \operatorname{Im}(z_s^n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

§4A Stetige und differentierbare reelle und Komplexe Funktionen

Def 4.1 Reelle und komplexe Funktionen

Eine Zuordnung, die jedem $x \in D$ eine Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt Funktion mit Definitionsbereich D

$$\begin{array}{ll} D \subset \mathbb{R} & D \subset \mathbb{C} \\ f: D \rightarrow \mathbb{R} & f: D \rightarrow \mathbb{C} \\ x \rightarrow f(x) & z \rightarrow f(z) \end{array}$$

Def Grenzwert

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n \in D, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ für alle solche Folgen, heißt A Grenzwert von f in a
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Def 4.2 Stetigkeit

$$\begin{array}{l} f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, a \in D \\ f \text{ heißt stetig in } a \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a) \\ f \text{ heißt stetig in } D \Leftrightarrow f \text{ stetig in allen } a \in D \end{array}$$

Satz 4.3 $\delta - \varepsilon$ - Kriterium für Stetigkeit (9.12.97)

$$\begin{array}{l} f \text{ stetig in } a \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ so daß aus } |z - a| < \delta \text{ folgt } |f(z) - f(a)| < \varepsilon \end{array}$$

Satz Folgerung aus $\delta - \varepsilon$ - Kriterium

$$\begin{array}{l} f \text{ stetig in } a, f(a) > b \Rightarrow \\ \exists \delta > 0, \text{ so daß } f(x) > b \text{ für alle } x \in (a - \delta, a + \delta) \quad (\text{auch mit } <) \end{array}$$

Satz Zwischenwertsatz

$$\begin{array}{l} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig in } [a, b], f(a) < f(b) \\ \Rightarrow \text{zu jedem } y \in [f(a), f(b)] \text{ gibt es eine Zahl } x_0 \in (a, b) \text{ mit } f(x_0) = y \end{array}$$

Def allg. Potenz

$$a > 0, x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln a}$$

Satz Satz vom Maximum (Minimum)

$$\begin{array}{l} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig in } [a, b] \\ \Rightarrow \text{es gibt } \text{Max } f([a, b]) = \text{Max} \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} \\ \text{und } \text{Min } f([a, b]) \end{array}$$

Def 4.4 Differenzenquotient

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$$
$$f(x) - f(x_0)$$

Falls $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert, heißt er Differenzenquotient oder

Ableitung von f in x_0 und f differenzierbar in x_0

Satz Allg. Differentiationsregeln

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \delta(z) \quad z \neq z_0$$

Differenzierbarkeit in $z_0 \Leftrightarrow \delta(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \delta(z)(z - z_0)$$

lin. Approximierbarkeit:

$$f(z) \cong f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

f in z_0 diff'bar $\Leftrightarrow f$ ist stetig in z_0

Satz Taylorformel für Polynome

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Satz Differentiation der Umkehrfunktion

$$f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) \neq 0$$

$$f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

§4B Lineare Differentialgleichungen

Verfahren Lineare homogene Differentialgleichungen mit konst. Koeffizienten

$$f^{(n)}(z) + a_{n-1} f^{(n-1)}(z) + \dots + a_0 f(z) = 0$$

Ansatz:

$$f(z) e^{\alpha z} \Rightarrow f^{(k)}(z) = \alpha^k e^{\alpha z}$$

$$e^{\alpha z} (\alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0) = 0$$

char. Polynom $\chi(\alpha)$

Allg. Lösungen:

1. Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit Vielfachheit n:
 $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x}$
2. Nullstelle $\alpha = a \pm ib \in \mathbb{C}$ mit Vielfachheit n:
 $e^{(a \pm ib)x} = e^{ax} (\cos bx \pm i \sin bx) \Rightarrow$
 $e^{ax} \cos bx, x e^{ax} \cos bx, \dots, x^{n-1} e^{ax} \cos bx$
 $e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{n-1} e^{ax} \sin bx$

Verfahren Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konst. Koeffizienten

$$f^{(n)}(z) + a_{n-1} f^{(n-1)}(z) + \dots + a_0 f(z) = b(x)$$

$$y_{\text{inhom}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{sp}}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite:

1. $b(x) = e^{\beta x} \sum_{k=0}^r d_k x^k$ m: Vielfachheit d. Nst. β in $\chi(\alpha)$

ges: β, r, m

$$\Rightarrow y_{\text{sp}}(x) = x^m e^{\beta x} \sum_{k=0}^r u_k x^k$$

2. $b(x) = e^{\beta x} \sin(\gamma x) \sum_{k=0}^r b_k x^k + e^{\beta x} \cos(\gamma x) \sum_{k=0}^r \tilde{b}_k x^k$

m: Vielfachheit d. Nst. $(\beta + i\gamma)$ in $\chi(\alpha)$

ges: β, r, m

$$\Rightarrow y_{\text{sp}}(x) = x^m e^{\beta x} \left(\sin(\gamma x) \sum_{k=0}^r u_k x^k + \cos(\gamma x) \sum_{k=0}^r \tilde{u}_k x^k \right)$$

3. Superposition

Verfahren Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y'(x) + a(x) y(x) = b(x) \quad | e^{A(x)} \quad (\text{Vorr.: } A' = a)$$

$$e^{A(x)} y'(x) + a(x) e^{A(x)} y(x) =$$

$$\frac{d}{dx} (e^{A(x)} y(x)) = e^{A(x)} b(x) = B'(x) \quad (\text{Vorr.: } B' = b e^{A(x)})$$

$$\frac{d}{dx} (e^{A(x)} y(x) - B(x)) = 0 \Rightarrow e^{A(x)} y(x) - B(x) = c$$

$$\Rightarrow \text{Allg. Lsg: } y(x) = c e^{-A(x)} + B(x) e^{-A(x)} \quad c \in \mathbb{R}$$

§5A Kurvendiskussion reeller Funktionen

Satz **Satz von Rolle**

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$f(a) = f(b) \Rightarrow$ es gibt $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

Satz **1. Zwischenwertsatz**

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

\Rightarrow es gibt $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Satz **2. Zwischenwertsatz**

f und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

f und $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$g'(x) \neq 0$ auf (a, b)

\Rightarrow es gibt $x_0 \in (a, b)$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Satz **Regel von l'Hospital**

f und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

f und $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$f(a) = g(a) = 0/\infty$

$g'(x) \neq 0$ auf (a, b)

$\lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (falls dieser existiert (mit $\pm \infty$))

Fälle:

$1^\infty, \infty^0, 0^\infty \Rightarrow [f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)} = e^{f(x)}$

$\infty - \infty \Rightarrow f(x) - g(x) = \ln(e^{f(x) - g(x)}) = \ln \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}}$

Satz **Hinreichende Bed. für rel. Extrema**

$f, f', \dots, f^{(n)}$ stetig um x_0

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$

es gilt: $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0: \text{Minimum} \\ f^{(n)}(x_0) < 0: \text{Maximum} \end{cases}$

n ungerade \Rightarrow kein Extremum (Sattelpunkt)

§5B Stammfunktionen und Ableitungen

Funktion f

Stammfunktion F

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x + c$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1, 1)$$

$$\arcsin x + c \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

$$1/x$$

$$\ln |x| + c$$

$$a^x$$

$$\frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$x^a$$

$$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\ln |f(x)| + c$$

$$\frac{1}{(x+a)^j} \quad j \geq 2$$

$$\frac{-1}{j-1} \frac{1}{(x+a)^{j-1}} + c$$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x + c$$

$$\frac{1}{(x+b)^2 + a^2}$$

$$\frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x+b}{a} \right) + c$$

§6 Integration

Def **Zerlegung**
 $Z = \{ t_i \mid a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \}$ heißt Zerlegung des Intervalls $[a, b]$

Def **Ober- und Untersummen**
 $\bar{S}(Z) = \sum_{i=1}^n \text{Sup } f([t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})$ heißt Obersumme
 $\underline{S}(Z) = \sum_{i=1}^n \text{Inf } f([t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})$ heißt Untersumme
 $\underline{S}(Z_1) \leq \bar{S}(Z_2)$

$$\int_a^b f(x) dx^* = \text{Inf } O \quad *) \text{ geeignetes Integralzeichen nicht verfügbar}$$

$$\int_a^b f(x) dx^* = \text{Sup } U$$

Def 6.1 **Riemann-Integrierbarkeit**
 f heißt Riemann-integrierbar über $[a, b] \Leftrightarrow$
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. Dann heißt $\int_a^b f(x) dx$ das (Riemann-) Integral von f über $[a, b]$ und wird mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet.

Für Integrierbarkeit reicht es zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ gibt es Zerlegungen } Z_1 \text{ und } Z_2 \text{ mit } \bar{S}(Z_2) - \underline{S}(Z_1) < \varepsilon$$

Def **Äquidistante Zerlegung**
 $t_k = a + k \frac{b-a}{n}$

Satz f stetig \Rightarrow
 es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N , so daß für ein $n \geq N$
 $\text{Max} \{ \text{Max } f([t_{i-1}, t_i]) - \text{Min } f([t_{i-1}, t_i]) \mid i = 1, \dots, n \} < \varepsilon / (b-a)$

Satz **1. Zwischenwertsatz der Integralrechnung**

Es gibt zu jedem $t \in (a, b)$ mit $f(t) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

Def **Bestimmte und unbestimmte Integrale**

$\int_a^b f(x) dx$ heißt bestimmtes Integral

$\int f(x) dx = \int_f = \{G + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ heißt unbestimmtes Integral

Satz **Hauptsatz der Integralrechnung**
f: [a, b] → stetig, G Stammfunktion von f
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = {}_a^b[G(x)]$$

Satz **Partielle Integration**
$$\int f' g dx = fg - \int g' f dx$$

Satz **Substitutionsregel**
$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

$$\Rightarrow \int F'(g(x))g'(x) = F(g(x)) + c$$

Satz **Integration von Potenzreihen**
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ mit Konvergenzradius } R$$

Stammfunktion
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \text{ auf } (-R, R)$$

Def **uneigentliche Integrale**
Riemann-Integrale sind definiert für gewisse beschränkte Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen.
Für unbeschränkte Funktionen oder Intervalle läßt sich in manchen Fällen eine "Fläche" als Grenzwert von Riemann-Integralen bilden. Solche Grenzwerte heißen uneigentliche Integrale.