Zusammenfassung der Sätze und Definitionen

zur von Prof. Wirths im SS 98 gehaltenen Vorlesung

Analysis für Informatiker II

September 1998

von Carsten F. Buschmann
C.Buschmann@tu-bs.de

Inhalt

§1 Taylor-/Fourier-Reihen/-Polynome

Def 1,1 **Taylorpolynome**

sind Polynome, die f lokal in der Nähe von x_0 möglichst gut approximieren

$x_0 \in \mathbb{R}$, f: $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

f n-mal diff 'bar in x_0

$$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$ heißt Taylorpoly. zu f in x_0 vom Grad n

Ansatz:

$$T_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x - x_0)^k$$

Forderung:

$T_n^{(k)}(x_0, x) = f^{(k)}(x_0)$, k = 1, ..., n

$$T_n^{(l)}(x_0, x) = \sum_{k=l}^{n} A_k \; k (k-1) \ldots (k-l+1) (x - x_0)^{k-l}$$

$$T_n^{(l)}(x_0, x) = \sum A_k \, l! = f^{(l)}(x_0),$$

$$A_l = \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!}$$

Satz 1.2 **Fehlerdarstellung für Taylorpolynome**

$$\Delta_n(x) = f(x) - T_n(x_0, x)$$

$$= (-1)^n \int_{x_0}^{x} f^{(n-1)}(t) \frac{(t-x)^n}{n!} dt$$

wenn f stetig

Def 1.3 **Taylorreihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$ heißt Taylorreihe zu f in x_0

Sie konvergiert gegen f(x) für $\Delta_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ innerhalb des Konvergenzradius $R > | x - x_0 |$

Eine Funktion f(x) läßt sich durch ihre Tailorreihe darstellen, wenn f(z) um a komplex differenzierbar ist.

Def 1.4 **Skalarfeld**

$D \subset \mathbb{R}^N$, f: $D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Skalarfeld auf D

Schreibweise: $f(x_1, ..., x_n)$

Def 1.5 **partielle Ableitung**

$D \subset IR^N$, f: $D \rightarrow IR$ Skalarfeld

$(x_1^0, ..., x_n^0) \in D$

$$\frac{d}{dx} f(x, , ..., x_n^0) \Big|_{x = x_1^0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, ..., x_n^0)$$

heißt partielle Ableitung von f nach x_1 in $(x_1^0, ..., x_n^0)$

Def 1.6 **Gradient**

$D \subset IR^N$, f: $D \rightarrow IR$ Skalarfeld besitze partielle Ableitungen nach $x_1, ..., x_n$ überall in D

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \rightarrow IR^N$$ heißt Gradient von f (grad f)

Def 1.7 **Fourierpolynom**

f: $(-\pi,\pi) \rightarrow IR$

$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$$

heißt Fourierpolynom vom Grad n von f und Fourierreihe für $n \rightarrow \infty$

Def 1.8 **Fehlerdarstellung für Fourierpolynome**

$$\Delta_n^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2 dx$$

Minimaler Fehler:

$$\Delta_n^2(a_0,...,b_k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - 2\pi a_0{}^2 - \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k^2 + b_k^2)$$

Wenn $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$ existiert, gilt die besselsche Ungleichung

$$2\pi\, a_0{}^2 + \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

sowie $\Delta_n^2(a_0,...,b_k) \xrightarrow[n\rightarrow\infty]{} 0 \Leftrightarrow$

Parsevalsche Gleichung:

$$2\pi\, a_0{}^2 + \sum_{k=1}^{n} \pi(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

Satz **Wechsel der Periode**

f: [-t, t] $\to$ IR

$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{t} + b_k \sin \frac{k\pi x}{t} \right)$ mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x)dx\,, \quad a_k = \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} f(x)\cos(\frac{k\pi\,x}{t})dx\,, \quad b_k = \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} f(x)\sin(\frac{k\pi\,x}{t})dx$$

f aperiodisch: l $\to \infty$ (Fouriertransformierte)

§ 2 Rechnen im IR^N

Def **Skalarprodukt**

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ heißt Skalarprodukt

Def **Norm**

$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| =_+ \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ heißt Norm

Eigenschaften: wie Beträge

Def **Metrik**

$d(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|$ heißt Metrik und ist geometrisch als Abstand zwischen 2 Punkten/Vektoren interpretierbar

Eigenschaften: wie Beträge

Def **Kugel**

$K(\vec{x}_0, r) = \{ \vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{x}_0| < r \}$ heißt (offene) Kugel um $\vec{x}_0$ mit Radius r

Def **Offnen Menge**

$M \subset IR^N$ heißt offen $\Leftrightarrow$ zu jedem $\vec{x}_0 \in M$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K(\vec{x}_0, \varepsilon) \subset M$

Def **(Weg-)zusammenhängende Menge**

$M \subset IR^N$ heißt zusammenhängend $\Leftrightarrow$ zu je zwei Punkten $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in M$ gibt es Punkte $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$, so daß die Strecken zwischen $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ usw. in M liegen.

Def **Gebiet**

$M \subset IR^N$ heißt Gebiet $\Leftrightarrow$ M ist offen und zusammenhängend

Def **Folge im IR^N**

$(\vec{x}_n)_{n \in IN} = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ : \\ x_{N,n} \end{pmatrix}$ heißt Folge im IR^N.

$(\vec{x}_n)_{n \in IN}$ heißt Punktfolge, wenn alle Folgenglieder verschieden sind.

Def **Grenzwert einer Folge**

$\vec{a} \in IR^N$ heißt Limes oder Grenzwert einer Folge $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß $\vec{x}_n \in K(\vec{a}, \varepsilon)$ für n > N.

($\Leftrightarrow$ $(x_{i,n})_{n \in IN}$ (Komponentenfolgen) konvergieren gegen a_i)

Def **Häufungspunkt einer Folge**

Eine Punktfolge $(\vec{x}_n)_{n\in IN}$ besitzt $\vec{a} \in IR^N$ als Häufungspunkt

$\Leftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge, die gegen $\vec{a}$ konvergiert

$\Leftrightarrow$ zu jedem zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Folgenglieder, die in K($\vec{a}$, ε) für n > N.

Def **Häufungspunkt einer Menge**

$\vec{a}$ heißt Häufungspunkt von M $\subset$ IR^N, wenn es in M eine Punktfolge gibt, die $\vec{a}$ als HP hat. (der HP muß nicht zur Menge gehören)

Def **abgeschlossene Menge**

M $\subset$ IR^N heißt abgeschlossen $\Leftrightarrow$ alle HP's der Menge gehören zur Menge

Def **Abgeschlossen Hülle**

$\overline{M} = M \cup \{\vec{a} \mid \vec{a}$ ist Hp von M$\}$ heißt abgeschlossene Hülle von M

Def **Offener Punkt**

$\vec{x} \in$ M heißt offener Punkt von M $\Leftrightarrow$ es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit K($\vec{x}_0$, ε) $\subset$ M

(M offen $\Leftrightarrow$ alle Punkte von M sind offen)

Def **Offener Kern von M**

$\mathring{M} =$ Menge der offenen Punkte von M

Def **Rand einer Menge**

$\partial M = \overline{M} - \dot{M}$ heißt Rand von M

Def **Beschränkte Menge/Punktfolge**

Eine Menge M (Punktfolge) des IR^N heißt beschränkt $\Leftrightarrow$ $\{|\vec{x}| \mid \vec{x} \in M\}$ ist beschränkt.

($\Leftrightarrow$ kein Punkt ist unenlich weit von Ursprung entfernt)

Satz Jede beschränkte unendliche Menge (Punktfolge) hat mindestens einen Häufungspunkt.

Def **Kompakte Menge**

M $\subset$ IR^N heißt kompakt $\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt.

Def **Stetigkeit**

D $\subset$ IR^N $\quad \vec{x}_0 \in D \quad \vec{f}$: D $\rightarrow$ IR^L (L=1: Skalarfeld, L=N: Vektorfeld)

$\vec{f}$ stetig in $\vec{x}_0 \in D$ $\Leftrightarrow$ die komponentenfunktionen von $\vec{f}$ sind stetig in $\vec{x}_0 \in D$

Satz **Satz vom Minimum (Maximum)**

K $\subset$ IR^N kompakt

f: K $\rightarrow$ IR stetiges Skalarfeld auf K

f nimmt auf K ein Minimum und ein Maximum an

§3A Differentiation von Skalarfeldern

Def 3.1 **totale Differenzierbarkeit**

$\vec{a} \in$ IR^N; f: K($\vec{a}$, ε) → IR heißt in $\vec{a}$ total differentierbar ⇔

$f(\vec{x}) = (\Delta_1(\vec{x}),...,\Delta_N(\vec{x}))\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ : \\ x_n - a_n \end{pmatrix} + f(\vec{a})$ und $\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{a}} \Delta_i(\vec{x})$ existieren: i= 1,...,N

Satz 3.2 **Totale Differenzierbarkeit**

$\vec{a} \in$ IR^N; f: K($\vec{a}$, ε) → IR

f in $\vec{a}$ total differenzierbar ⇒ f ist in $\vec{a}$ nach allen Variablen partiell diffferenzierbar und $c_i = f_{x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$, d.h. $\vec{c} = grad\ f(\vec{a})$

Satz 3.3 **Totale Differenzierbarkeit**

$\vec{a} \in$ IR^N; f: K($\vec{a}$, ε) → IR

f in K($\vec{a}$, ε) stetig partiell differenzierbar ⇒ f ist in $\vec{a}$ total diffferenzierbar

Satz 3.4 **Kettenregel**

$\vec{a} \in$ IR^N; f: K($\vec{a}$, ε) → IR, $\vec{\varphi} : IR \longrightarrow IR^N$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}(\vec{\varphi}(t))\varphi_i'(t) = \langle grad\ f(\vec{\varphi}(t)), \vec{\varphi}'(t) \rangle$$

Satz **Mittelwertsatz für Skalarfelder**

D ⊂ IR^N offen

f: D → IR total differenzierbar, $\vec{a}$, $\vec{b} \in$ D, $\overline{\vec{a}\vec{b}} \subset D$

⇒ Es gibt $\vec{c} \in \overline{\vec{a}\vec{b}}$ mit f($\vec{b}$) - f($\vec{a}$)= $\langle grad\ f(\vec{c}), \vec{b} - \vec{a} \rangle$

Satz **Satz von Schwarz**

Sind alle 2. partiellen Ableitungen eines Skalarfeldes stetig, kommt es nicht auf die Reihenfolge der Differentiation an.

Def **Eigenwerte**

Eigenwerte einer Matrix A sind die Nullstelle des charakteristischen Polynoms det(xE-A)

Satz **Satz aus der LA**

Reelle, symetrische Matrizen besitzen nur reelle Eigenwerte

Satz **Cartesische Zeichenwechselregel**

Hat das Polynom $x^n + ... + a_0$ nur reelle Nullstellen, so gilt:

alle $a_i > 0$ ⇒ alle Nullstellen neg.

alle $a_i a_{i.1} < 0$ ⇒ alle Nullstellen pos.

Satz **Minima und Maxima von Skalarfeldern**

$\vec{a} \in$ IR^N; f: K($\vec{a}$, ε) → IR Skalarfeld hat in $\vec{a}$ lokales Min/Max

$\vec{h} \neq \vec{0}$, $g_{\vec{h}}(t) = f(\vec{a} + t\vec{h})$ Geradenschar hat in t=0 für

1. alle $\vec{h}$ ein Min/Max ⇒ f hat in $\vec{a}$ ein Min/Max
2. mache $\vec{h}$ ein Min und manche $\vec{h}$ ein Max ⇒ f hat in $\vec{a}$ einen Sattelpkt.

$$\frac{d^2}{dt^2} g_{\vec{h}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} f_{x_i}((\vec{a} + t\vec{h}))h_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\vec{a} + t\vec{h})h_j\right)h_i \overset{t=0}{=} \sum_{i,j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\vec{a})h_j h_i\right.$$

$$= (h_1, \ldots, h_N) \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{a}) & \ldots & f_{x_1x_N}(\vec{a}) \\ : & & : \\ f_{x_Nx_1}(\vec{a}) & \ldots & f_{x_Nx_N}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ : \\ h_N \end{pmatrix}$$

Def **Hessematrix**

$$\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{a}) & \ldots & f_{x_1x_N}(\vec{a}) \\ : & & : \\ f_{x_Nx_1}(\vec{a}) & \ldots & f_{x_Nx_N}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$ heißt Hessematrix von f in $\vec{a}$: $H_f(\vec{a})$

Satz Forts.

$\sum_{i,j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\vec{a})h_j h_i$ sei

1. > 0 für alle $\vec{h}$ ⇒ f hat in $\vec{a}$ ein lokales Min
2. < 0 für alle $\vec{h}$ ⇒ f hat in $\vec{a}$ ein lokales Max
3. > 0 für mache $\vec{h}$ und < 0 für mache $\vec{h}$ ⇒ f hat in $\vec{a}$ einen Sattelpkt.

Schema **Beziehung zwischen Eingenwerten von $H_f(\vec{a})$ und rel. Extrema**

	f hat in $\vec{a}$	Eigenwerte von $H_f(\vec{a})$	Char. Polynom	$H_f(\vec{a})$ heißt
1	Minimum	alle EW > 0	Koeff. alternierend	pos. definit
2	Max	alle EW < 0	alle Koeff. > 0	neg. definit
3	Sattelpunkt	manche EW > 0 manche EW < 0	$a_0 \neq 0$, sonst weder 1 noch 2	indefinit
4	keine Auss.	alle EW = 0	nur λ = 0 Nullstelle	entartet
5	kein Minimum	manche EW = 0 mache EW < 0	$a_0 = \ldots = a_{n-x} = 0$ alle anderen Koeff > 0	neg. semidefinit
6	kein Maximum	manche EW = 0 mache EW > 0	$a_0 = \ldots = a_{n-x} = 0$ alle anderen Koeff alternierend	pos. semidefinit

§3B komplexe Differentiation

Def **komplexe Differenzierbarkeit**
$f: K(z_0, \varepsilon) \to C$; $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$

f komplex differenzierbar $\Leftrightarrow$ der komplexe Differenzenquotiernt existiert.

$f = u + iv$ komplex differenzierbar in $z_0 \Leftrightarrow$ u, v total differenzierbar in (x_0, y_0) und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$$
$$-u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)$$

Def **Laplace-Operator**
$D \subset IR^N$ offen; $u: D \to IR$ 2x stetig partiell differenzierbar
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i} = 0$ heißt Laplace-Gleichung. Δ heißt Laplace-Operator. Die Lösungen u der Laplace-Gleichung heißen harmonische Funktionen.

Satz **Komplexe Differenzierbarkeit**
Skalarfelder u, v erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen
$\Leftrightarrow f = u + iv$ ist komplex differenzierbar
$\Leftrightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

Satz **Potential** ϕ
$D \subset IR^N$ Gebiet,
Für ein Vektorfeld $\vec{f}: D \to IR^N$ existiert ein Skalarfeld $\phi: D \to IR \Leftrightarrow$
die Integrabilitätsbedingung $f_{ix_j} = f_{jx_i}$ für $1 \le i < j \le N$ erfüllt ist.

Def **exakte Differentialgleichung**
Die Differentialgleichung $f_1(x, y) + f_2(x, y)\, y' = 0$ heißt exakt $\Leftrightarrow f_{1y} = f_{2x}$

Satz $\phi: IR^2 \to IR$, $\phi_x = f_1$, $\phi_y = f_2$
y ist Lösung einer exakten DGL $f_1(x, y) + f_2(x, y)\, y' = 0 \Leftrightarrow$
$\phi(x, y(x)) = \text{const.}$

Def **Euler-Multiplikator**
Ist $f_1(x, y) + f_2(x, y)\, y' = 0$ nicht exakt, so heißt eine Funktion $M(x, y)$ EulerMultiplikator $\Leftrightarrow M f_1 + M f_2\, y' = 0$ ist exakt.

$a(x) = \dfrac{f_{1y} - f_{2x}}{f_2}$ $\qquad a(y) = \dfrac{f_{2x} - f_{1y}}{f_1}$ $\Rightarrow M = e^{\int a\, dx}$

Satz **Übergang von f(x + iy) zu f(z)**

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} = \mathrm{Re}(z) \qquad y = \frac{z + \overline{z}}{2i} = \mathrm{Im}(z)$$

Nach Einsetzen und ausrechnen fällt $\overline{z}$ heraus

Satz Liegt ein Teil der reellen Achse im Definitionsbereich, so kann man auch x = z und y = 0 setzen

Def **Komplexer Logarithmus**

ln z := ln | z | + iφ (⇔ z = | z | $e^{i\varphi}$)

heißt komplexer Logarithmus und ist auf IR^2 \ { y=0, x≤0} komplex differenzierbar.

(ln (x + iy))' = 1/z

§4 Lineare Differentialgleichungssysteme

Satz **Satz von Cayley-Hamilton**

det(xE - A) = $\sum_{k=0}^{N} a_k x^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k A^k = 0_{NxN}$

Verfahren **Lin. hom. quadratische DGL-Systeme mit konst. Koeff. und AWP**

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x), \quad mit\ AWP\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

$$\vec{y}' = A\vec{y} \Rightarrow \vec{y}^{(k)} = A^k \vec{y}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k A^k \vec{y} = 0_{NxN}\ \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \vec{y}^{(k)} = \vec{0} \Rightarrow 0$$

$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y_r^{(k)}(x) = 0}$ r=1, .. N heißen ass. DGL mit allg. Lsg.

$y_r = c_1 l_1(x) + \dots + c_N l_N(x) \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{l} = \begin{pmatrix} l_1(x) \\ : \\ l_N(x) \end{pmatrix}}$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1N} \\ : & & : \\ c_{N1} & \dots & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(x) \\ : \\ l_N(x) \end{pmatrix} = C\vec{l}(x) \Rightarrow$$

$$\vec{y}'(x) = C\vec{l}'(x) \Rightarrow \vec{y}^{(k)}(x) = C\vec{l}^{(k)}(x) \Rightarrow A^k \vec{y}(x) = C\vec{l}^{(k)}(x); \quad k = 0,\dots,N-1 \Rightarrow$$

$$A^k \vec{y}_0 = C\vec{l}^{(k)}(x_0); \quad k = 0,\dots,N-1$$

in Matrix-Form:

$$\boxed{\left(\vec{y}_0, A\vec{y}_0, A^2\vec{y}_0, \dots, A^{N-1}\vec{y}_0\right) = C\left(\vec{l}(x_0), \dots, \vec{l}^{(N-1)}(x_0)\right)}$$

Y = CL(x_0)

$\boxed{C = Y L^{-1}(x_0)}$ L^{-1} existiert $\Leftrightarrow$ L regulär (voller Rang)

$$\boxed{\vec{y}(x) = C\vec{l}(x)}$$

Satz **Lösbarkeit von AWP's**

Jedes AWP hat genau eine Lösung

$\Rightarrow$ Dim IL = N

Def **Fundamentalsystem**

Eine Menge $\{\vec{y}_i : IR \to IR^N \mid i=1,...,N\}$ heißt Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y}$ $\Leftrightarrow$ sie ist Basis von IL.

Für ein Fundamentalsystem $\{\vec{y}_i : IR \to IR^N \mid i=1,...,N\}$ ist

$$\text{IL} = \{\sum_{i=1}^{N} c_i \vec{y}_i \mid \begin{pmatrix} c_1 \\ : \\ c_N \end{pmatrix} \in IR^N\}$$

Verfahren **Bestimmung eines Fundamentalsystems mit AWP**

Bestimme die Lösung von N AWP's $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{e}_i$, i = 1, ..., N, wobei e_i Basis des IR^N

Verfahren **Bestimmung eines Fundamentalsystems mit EW $\in$ IR**

wenn die EW $\lambda_1, ..., \lambda_N$ von A paarweise verschieden sind, so sind die Eigenvektoren $\vec{c}_1,...,\vec{c}_N \in IR^N$ Linear unabhängig $\Rightarrow$

$\vec{c}_1 e^{\lambda_1 x},...,\vec{c}_N e^{\lambda_N x} = \vec{y}_1(x),...,\vec{y}_N(x)$ sind Fundamentalsystem

Verfahren **Bestimmung eines Fundamentalsystems mit EW $\in$ C**

$\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib$ komplexe Eigenwerte von A

Eigenvektoren zu $\lambda : \vec{c} = \vec{\alpha} + i\vec{\beta} \qquad \bar{\lambda} : \bar{\vec{c}} = \vec{\alpha} - i\vec{\beta}$

komplexe Lösungen: $\vec{c}e^{\lambda x}, \bar{\vec{c}}e^{\bar{\lambda}x}$

$(\vec{\alpha} + i\vec{\beta})(e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx))$

reelle Lösungen: Re($\vec{c}e^{\lambda x}$), Im($\vec{c}e^{\lambda x}$)

Def **Wronski-Matrix**

$\vec{y}_1(x),...,\vec{y}_N(x)$ Fundamentalsystem von $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$, dann heißt W(x)=($\vec{y}_1(x),...,\vec{y}_N(x)$) Wronski-Matrix des DGL-Systems-

$$\text{IL} = \{W(x)\vec{c} = \sum_{i=1}^{N} c_i \vec{y}_i \mid \begin{pmatrix} c_1 \\ : \\ c_N \end{pmatrix} \in IR^N\}$$

Verfahren **Lin. inhom. DGL-Systeme mit konst. Koeff.**

$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{b}(x)$

$\vec{y} : IR \to IR^N$

$\vec{y} = \vec{y}_{\text{hom}} + \vec{y}_{sp} = W(x)\vec{c} + \vec{y}_{sp}$

Ansatz (der Varierten Konstanten):

$\vec{y}_{sp} = W(x) \underbrace{\vec{c}(x)}_{\text{var}.Konst.}$ (weil auch y_{sp} in IL liegen muß)

$$\begin{aligned} \vec{y}'_{sp} &= W'(x)\vec{c}(x) + W(x)\vec{c}'(x) \\ &= A\vec{y}_{sp}(x) \quad + \vec{b}(x) \\ &= AW(x)\vec{c}(x) + \vec{b}(x) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$W(x)\vec{c}'(x) = \vec{b}(x) \Rightarrow \vec{c}(x) = \int W(x)^{-1}\vec{b}(x) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{y}_{sp} = W(x)\int W(x)^{-1}\vec{b}(x)$$

§5 Nichtlineare Gleichungssysteme

Lösbarkeitsbedingung für $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}_M$

$\vec{F}: IR^N \to IR^M$ N > M

Es gibt ein $\vec{a} \in$ IR^N mit $\vec{F}(\vec{a}) = \vec{0}_M$

Ersetze $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}_M$ **in der Nähe von** $\vec{a}$ **durch ein lin. System**

(F_k stetig partiell differenzierbar in $K_\varepsilon(\vec{a})$)

$$F_k(x_1,...,x_N) = F_k(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{N} (F_{kx_i}(\vec{a}) + \delta_{k,i}(\vec{x}))(x_i - a_i) \quad \text{k=1,...,M}$$

$$\delta_{k,i}(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{y}]{} 0$$

$$F_k(x_1,...,x_N) \approx F_k(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{N} (F_{kx_i}(\vec{a})(x_i - a_i))$$

$$\vec{F}(\vec{x}) \approx F_k(\vec{a}) + \begin{pmatrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & .. & F_{1x_N}(\vec{a}) \\ : & \ddots & : \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & .. & F_{Mx_N}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ : \\ x_N - a_N \end{pmatrix}$$

(Verallgemeinerung der Ersetzung einer Funktion durch ihre Tangente)

Def **Jakobi-Matrix**

$\vec{F}: K_\varepsilon(\vec{a}) \subset IR^N \to IR^M$ stetig partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{x}}(\vec{a}) = J_{\vec{F}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & .. & F_{1x_N}(\vec{a}) \\ : & \ddots & : \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & .. & F_{Mx_N}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} grad\ F_1(\vec{a}) \\ : \\ grad\ F_M(\vec{a}) \end{pmatrix}$$ Jakobi-Matrix von $\vec{F}$ in $\vec{a}$.

Def **Totale Ableitung**

Die lin. Abb. $\Phi: IR^N \to IR^M$ $\Phi(\vec{x}) = J_{\vec{F}}(\vec{a})\vec{x}$ heißt totale Ableitung von $\vec{F}$ in $\vec{a}$.

Satz **Satz über implizite Funktion und lokale Auflösbarkeit**

$\vec{F}: K_\varepsilon(\vec{a}) \subset IR^N \to IR^M$ stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen.

$\vec{F}(\vec{a}) = \vec{0}_M$

Betrachtung der Jakobi-Matrix

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{x}}(\vec{a}) = J_{\vec{F}}(\vec{a}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & .. & F_{1x_M}(\vec{a}) \\ : & \ddots & : \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & .. & F_{Mx_M}(\vec{a}) \end{matrix}}_{\frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_,...,x_M)}(\vec{a})} \underbrace{\begin{matrix} F_{1x_{M+1}}(\vec{a}) & .. & F_{1x_N}(\vec{a}) \\ : & \ddots & : \\ F_{Mx_{M+1}}(\vec{a}) & .. & F_{Mx_N}(\vec{a}) \end{matrix}}_{\frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_{M+},...,x_N)}(\vec{a})} \right)$$

Ist die Determinante von $\frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_1,...,x_M)}(\vec{a}) \neq 0$ (d.h. Rang $J_{\vec{F}}(\vec{a})$ =M), dann gibt es eine lokale Auflösung des nichtlin. Gleichungssystems

$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}_M$ nach den Variablen $x_1,..., x_M$, d.h. folgendes:
Benennungen
$x_1 = y_1$ ... $x_M = y_M$
$x_{M+1} = z_1$ ... $x_N = z_{N-M}$
$a_1 = b_1$ ... $a_M = b_M$
$a_{M+1} = c_1$ ... $a_N = c_{N-M}$
Es gibt eine Kugel $K_\delta(\vec{c}) \subset IR^{N-M}$ und eine Kugel $K_\tau(\vec{b}) \subset IR^M$ und eine eind. def. Funktion $\vec{v}$: $K_\delta(\vec{c}) \to K_\tau(\vec{b})$, so daß $\vec{v}(\vec{c}) = \vec{b}$ und $\vec{F}(\vec{v}(\vec{z}),\vec{z}) = \vec{0}_M$. $\vec{v}$ ist stetig partiell differenzierbar nach allen Varialben.
Die Ableitungen werden nach der Kettenregel berechnet.

$$\begin{pmatrix} F_{1x_1}(\vec{a}) & .. & F_{1x_M}(\vec{a}) \\ : & \ddots & : \\ F_{Mx_1}(\vec{a}) & .. & F_{Mx_M}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1z_1}(\vec{c}) & .. & v_{1z_{N-M}}(\vec{c}) \\ : & \ddots & : \\ v_{Mz_1}(\vec{c}) & .. & v_{Mz_{N-M}}(\vec{c}) \end{pmatrix} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_{M+1},...,x_N)}(\vec{a}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_1,...,x_M)}(\vec{a}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial(z_1,...,z_{N-M})}(\vec{c}) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_{M+1},...,x_N)}(\vec{a}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial(z_1,...,x_{N-M})}(\vec{c}) = -\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_1,...,x_M)}(\vec{a})\right)^{-1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial(x_{M+1},...,x_N)}(\vec{a})$$

Def **Singuläre und reguläre Punkte**

$K = \{\vec{x} \mid \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}\}$

$\vec{a} \in$ K heißt regulärer Punkt von K $\Leftrightarrow$ Rang $J_{\vec{F}}(\vec{a})$ = M

$\vec{a} \in$ K heißt singulärer Punkt von K $\Leftrightarrow$ Rang $J_{\vec{F}}(\vec{a}) <$ M

K heißt regulär $\Leftrightarrow$ alle Punkte von K sind regulär.

Satz **Restringierte Optimierung und Lagrange-Multiplikatoren**

$$\vec{g} : IR^N \to IR^M, \quad N > M \quad \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1,...,x_N) \\ : \\ g_1(x_1,...,x_N) \end{pmatrix}$$

$K = \{\vec{x} \mid \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\}$ kompakte Menge
f: $K \subset IR^N \Rightarrow IR$
g_i,f stetig partiell differenzierbar

Seien $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 \in$ K mit f($\vec{x}_1$) = Max f(K) und f($\vec{x}_2$) = Min f(K)

Wenn $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ reguläre Punkte von K sind, dann gibt es M reelle Zahlen λ_1, ..., λ_M , so daß $grad\ f(\vec{x}_1) = \sum_{i=1}^{M} grad\ g_i(\vec{x}_1)\lambda_i$

Bem. Es gibt 2 Sorten von Kandidaten für Extrema:

1. Singuläre Punkte
2. die Lösungen $x_1,...,x_N$, λ_1, ..., λ_M des Gleichungssystems

$$g_1(x_1,...,x_N)=0$$

$$\vdots$$

$$g_M(x_1,...,x_N)=0$$

$$grad\ \ f_{x_1}(x_1,...,x_N)-\sum_{i=1}^{M} g_{ix_1}(x_1,...,x_N)\lambda_i=0$$

$$\vdots$$

$$grad\ \ f_{x_N}(x_1,...,x_N)-\sum_{i=1}^{M} g_{ix_N}(x_1,...,x_N)\lambda_i=0$$

§6 Kurven und Kurvenintegrale

Def **Parameterdarstellung einer Kurve**

$\wp$: $\vec{\varphi}:[a,b]\rightarrow$ IR^N $\vec{\varphi}(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ :\\ \varphi_N(t)\end{pmatrix}$

Tangete $\dfrac{\vec{\varphi}(t_0)-\vec{\varphi}(t)}{t_0-t}\xrightarrow[t_0\rightarrow t]{}\dot{\vec{\varphi}}(t_0)$, wenn Parameterdarst. differenzierbar.

Def **Trägermenge der Kurve**

Trägermenge = Tr($\wp$) = { $\vec{\varphi}(t)$ | t $\in$ [a, b] }

Def **Kurve**

Kurve ≈ Trägermenge + Durchlaufungsrichtung

Def **Glatte Parameterdarstellung**

$\vec{\varphi}:[a,b]\rightarrow$ IR^N, $\dot{\vec{\varphi}}(t)$: [a, b] → IR^N stetig, $\dot{\vec{\varphi}}(t)\neq\vec{0}$

Def **Äquivalente Darstellung**

$\vec{\varphi}:[a,b]\rightarrow$ IR^N, $\vec{\psi}:[\alpha,\beta]\rightarrow$ IR^N glatt heißen äquivalent ⇔

Es gibt f: [a, b] → [α, β] mit f ist bijektiv, f ' > 0, f ' stetig und $\vec{\psi}(f(t))=\vec{\varphi}(t)$

Eine Kurve ist Äquivalenzklasse äquivalenter Darstellungen.

Def **Tangente bei äquivalenten Darstellungen**

$\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}$ äquivalent

$\dot{\vec{\varphi}}(t)=\dot{\vec{\psi}}(f(t))f'(t)$

Richtung der Tangente ist Kurveneigenschaft, die Größe Eingenschaft der Darstellung

Def **Stückweise glatte Kurve**

Summe aus endlich vielen glatten Kurven

Satz **gegenläufige Kurve**

zu $\wp$: $\vec{\varphi}:[a,b]\rightarrow$ IR^N ist - $\wp$: - $\vec{\varphi}$: [-b, -a]→ IR^N mit - $\vec{\varphi}$ (t) = $\vec{\varphi}$ (- t)

Satz **Länge einer glatten Kurve**

L($\wp$) = $\int_a^b|\dot{\vec{\varphi}}|dt=\int_a^b\sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t)+...+\dot{\varphi}_N^2(t)}dt$

Länge ist eine Kurveneigenschaft

Def **Kurvenintegral**

$G \subset IR^N$ offen $\wp$: $\vec{\varphi}:[a,b] \to IR^N$ glatte Kurve mit Tr($\wp$) $\subset$ G

$\vec{K}$: G $\to IR^N$ stetiges Vektorfeld

Das Kurvenintegral längs $\wp$ über $\vec{K}$ $\int_{\wp} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$ wird definiert durch

$$\int_a^b \vec{K}(\vec{\varphi}(t)) \bullet \dot{\vec{\varphi}}(t)dt$$

Satz **Kurvenintegral der gegenläufigen Kurve**

$$\int_{-\wp} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = - \int_{\wp} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$$

Satz **Potential**

Besitzt $\vec{K}$: G $\to IR^N$ ein Potential Φ, so gilt für eine Kurve $\wp$ $\vec{\varphi}:[a,b] \to$ IR^N, Tr($\wp$) $\subset$ G mit Anfangspunkt $\vec{a} = \vec{\varphi}$(a) und Endpunkt $\vec{b} = \vec{\varphi}$(b):

$$\int_{\wp} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a})$$

Satz **Wegunabhängigkeit**

Besitzt $\vec{K}$: G $\to IR^N$ ein Potential $\Phi \Leftrightarrow \int_{\wp} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$ ist in G wegunabhängig

$\Leftrightarrow$ Das Kurvenintegral ist wegunabhängig, wenn das Kurvenintegral über jede geschlossene Kurve 0 ist.

$\Leftrightarrow$ G ist einfach zusammenhängend (hat keine Löcher)

Ist $\int_{\wp} \vec{K}(\vec{x}) \bullet d\vec{x}$ in G wegunabhängig, $\vec{a} \in$ G fest, so ist $\Phi(\vec{x}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{K}(\vec{y}) \bullet d\vec{y}$ ein Potential zu $\vec{K}$.

Def **Komplexe Kurvenintegrale**

Kurve in C: z(t) = x(t) + i y(t)

z = x + iy

f: G $\subset$ C $\to$ C, z $\to$ f(z) stetig

f(z) = u(x, y) + i v(x, y)

$$\int_{\wp} f(z) \bullet dz = \int_{\wp} (u + iv) \bullet (dx + idy) = \int_{\ell} udx - vdy + i \int_{\ell} vdx + udy$$

Satz **Rechenregeln für komplexe Kurvenintegrale**

1. $\int_{\ell}$ (g(z) + f(z))dz = $\int_{\ell}$ g(z)dz + $\int_{\ell}$ f(z)dz
2. a $\in$ C: $\int_{\ell}$ a f(z)dz = a $\int_{\ell}$ f(z) dz

Satz **Existenz einer Stammfunktion**

G einfach zusammenhängend

f = u + iv komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$\Rightarrow$ Wenn U, V mit

$$U_x = u = V_y,$$
$$U_y = -v = -V_x$$

existieren und a,b $\in$ C Anfangs- bzw. Endpunkt von $\wp$, dann gilt

$\int_{\wp} f(z) \bullet dz$ = (U(b) - U(a)) + i(V(b) - V(a))

Es kann zu f nur dann eine Stammfkt. F = U + iV geben, wenn

$U_{xy} = u_y$ $\quad V_{xy} = v_y$

$U_{yx} = -v_x$ $\quad V_{yx} = u_x$

$\Rightarrow$ Das Vektorfeld $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ hat ein Potential U, wenn $u_y = v_x$

$\Rightarrow$ Das Vektorfeld $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ hat ein Potential V, wenn $v_y = u_x$

Satz **Cauchyscher Integralsatz**

G einfach zusammenhängendes Gebiet

f = u + iv komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$\wp$ geschlossene Kurve in G

$\Rightarrow \int_{\wp} f(z) \bullet dz = 0$

Satz **1. Cauchysche Integralformel**

f = u + iv komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$\wp$ einfach geschlossene Kurve in G, die math. positiv durchlaufen wird

a $\in$ I($\wp$) (im Inneren der Kurve)

$$\Rightarrow \ f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Satz **Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel**

f = u + iv komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$\wp$ einfach geschlossene Kurve in G

a $\in$ I($\wp$) (im Inneren der Kurve)

$$\Rightarrow \ f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\ell} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

Satz **Residuensatz**

f = u + iv komplex differenzierbar (u, v stetig differenzierbar)

$u_x = v_y$, $u_y = - v_x$

$\wp$ einfach geschlossene Kurve in G

$a_1,...,a_n \in I(\wp)$ (im Inneren der Kurve)

$$\int_{\ell} \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{N} (z-a)^{k_i+1}} dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{K_j} \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{N} (z-a)^{k_i+1}} dz = \sum_{j=1}^{N} R_j$$

Anwedung der verallgemeinerten Causchyschen Integralformel

$$\int_{K_i} \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{N} (z-a)^{k_i+1}} dz = \int_{K_i} \frac{f(z)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} (z-a)^{k_i+1} (z-a)^{k_j+1}} dz =$$

$$\frac{d^{k_i}}{(dz)^{k_i}} \left(\frac{f(z)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} (z-a)^{k_i+1} (z-a)^{k_j+1}} \right) \Bigg|_{z=a_j} \frac{2\pi i}{k_j!} = R_j$$

Satz Jede in einem Kreis um a komplex differenzierbare Funktion f läßt sich dort in die Potenzreihe $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ entwickeln.

§7 N-dimensionale Integration

Satz **Mehrfachintegrale auf Quadern**

B = { (x_1, ..., x_N) | $a_i \le x_i \le b_i$ } (Quader)
f stetig auf B

Mann kann $\iiint_B f(x_1,...,x_N)dx_1...dx_N = \int ... \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,...,x_N)dx_1 \right) dx_2 \right) ...dx_N$

explizit ausrechnen, die Integrationsreihenfolge ist bei stetigem f egal.

Satz **Integrale auf durch Funktionen beschränkten Bereichen**

B={(x,y)| a ≤ x ≤ b, g(x) ≤ y ≤ h(x)}

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Satz **2-dim. Verfahren nach Satz von Gauß in der Ebene**

$\wp$ einfach geschlossene Kurve, Tr($\wp$) ⊂ IR^2

$\vec{K}$: I($\wp$) ∪ Tr($\wp$) → IR^2 stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\iint_{I(\ell)} (K_{2x}(x,y) - K_{1y}(x,y))dxdy = \int_\ell K_1(x,y)dx + K_2(x,y)dy$$

Rechnerisch:

$$\iint_{I(\ell)} f(x,y)dxdy = ?$$

Berechne $\vec{K}$ (x, y) mit f(x, y) = $K_{2x}(x,y) - K_{1y}(x,y)$

Satz **Transformationformel**

N Quader, B komplexeres Gebiet

$\vec{x} \in$ N, $\vec{y} \in$ B,

$\vec{g}$: N → B, $\vec{g}$ (N) = B, $\vec{g}$ inj. auf $\dot{N}$, det($J_{\vec{g}}(\vec{x})$) ≠ 0 für $\vec{x} \in \dot{N}$

$\vec{g}$ stetig partiell diffbar

f : B → IR stetig

$$\int ... \int_B f(\vec{y})d\vec{y} = \int ... \int_N f(\vec{g}(x)) \left| \det(J_{\vec{g}}(\vec{x})) \right| d\vec{x}$$

↓→⇒⇐⊂≤≥±∩≠∅⇔⌈⌊{∧∨∑ΔγαβδχεφϕλμπτψΦ≈≡∂°∞∃∀∈∉≅