

Logische Symbole

1.3 Definitionen von \wedge , \vee und \leftrightarrow :

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta) &= (\neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta))), \\(\alpha \vee \beta) &= ((\neg\alpha) \rightarrow \beta), \\(\alpha \leftrightarrow \beta) &= ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)).\end{aligned}$$

Außerdem ist $\exists x\varphi = \neg\forall x(\neg\varphi)$.

Rang

1.10 Definition von $\text{Rg}(\varphi)$:

- (1) Wenn $\varphi \in \underline{\text{Var}}$, dann $\text{Rg}(\varphi) = 0$,
- (2) $\text{Rg}(\neg\alpha) = \text{Rg}(\alpha) + 1$,
 $\text{Rg}(\alpha \rightarrow \beta) = \max\{\text{Rg}(\alpha), \text{Rg}(\beta)\} + 1$.

Belegungen

2.2 Regeln für Belegungen $w : \underline{A} \rightarrow \{0, 1\}$:

- (1) $w(\neg\alpha) = 1 - w(\alpha)$,
- (2) $w(\alpha \rightarrow \beta) = 1 - w(\alpha) + w(\alpha)w(\beta)$.

Regeln zum syntaktischen Beweisen

3.1 Hilbertaxiome: Die Axiome \underline{H} sind

- (1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$,
- (2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$,
- (3) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$.

3.2 Grundregeln für \vdash :

- (1) **Anfangsregel:** $X \vdash \alpha$ für alle $\alpha \in X \cup \underline{H}$,
- (2) **Modus Ponens:** $X \vdash \alpha, \alpha \rightarrow \beta$, dann $X \vdash \beta$.

3.8 Deduktionstheorem: $X, \alpha \vdash \beta$ gdw. $X \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

3.9 Wenn $X \vdash \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma$, dann $X \vdash \alpha \rightarrow \gamma$.

3.10 Wenn $X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta$, dann $X \vdash \alpha$.

3.11 Es gilt $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.

3.12 Es gilt $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$.

3.13 Wenn $X, \alpha \vdash \beta, \neg\beta$, dann $X \vdash \neg\alpha$.

3.14 Es gilt $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

3.15 Es gilt $\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

3.16 Wenn $X \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$, dann $X \vdash \alpha, \neg\beta$.

Tableaukalkül

5.1 Regeln für Tableauxfolgen:

(1) Anfangsregel (A): $\bullet X$,

(2) Für einen beliebigen Zweig:

(R1) $X \xrightarrow{\quad} \alpha \in X$,

(R2) $X \xrightarrow{\quad} \neg\neg\beta$,

(R3) $X \xrightarrow{\quad} \alpha \rightarrow \beta$,
 $\quad \quad \quad \nearrow \neg\alpha$
 $\quad \quad \quad \searrow \beta$,

(R4) $X \xrightarrow{\quad} \neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha, \neg\beta$.

Relationen

Eine Relation $S \subseteq A^2$ heißt

reflexiv, gdw. für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in S$,

antisymmetrisch, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
wenn $(a, b), (b, a) \in S$, dann $a = b$,

konnex, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
 $(a, b) \in S$ oder $(b, a) \in S$ oder $a = b$,

irreflexiv, gdw. für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin S$,

symmetrisch, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
wenn $(a, b) \in S$, dann $(b, a) \in S$,

linear, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
 $(a, b) \in S$ oder $(b, a) \in S$,

transitiv, gdw. für alle $a, b, c \in A$ gilt:
 $(a, b), (b, c) \in S$, dann $(a, c) \in S$.

freie Variablen

Für atomare Formeln α ist $\text{frei}(\alpha) = \text{var}(\alpha)$, für nicht atomare Formeln gilt

$$\begin{aligned}\text{frei}(\neg\alpha) &= \text{frei}(\alpha), \\ \text{frei}(\alpha \rightarrow \beta) &= \text{frei}(\alpha) \cup \text{frei}(\beta), \\ \text{frei}(\forall x\alpha) &= \text{frei}(\alpha) \setminus \{x\}.\end{aligned}$$

Regeln zum semantischen Beweisen in der Prädikatenlogik

7.2 Definition von $\mathfrak{M} \models \varphi[\nu]$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \models s \equiv t[\nu] &\text{ gdw. } \nu(s) = \nu(t), \\ \mathfrak{M} \models rt_1 \dots t_n[\nu] &\text{ gdw. } (\nu(t_1), \dots, \nu(t_n)) \in r^{\mathfrak{M}}, \\ \mathfrak{M} \models (\neg\alpha)[\nu] &\text{ gdw. nicht } \mathfrak{M} \models \alpha[\nu], \\ \mathfrak{M} \models (\alpha \rightarrow \beta)[\nu] &\text{ gdw. } (\mathfrak{M} \models \alpha[\nu], \text{ dann } \mathfrak{M} \models \beta[\nu]), \\ \mathfrak{M} \models (\forall x\alpha)[\nu] &\text{ gdw. (für alle } a \in I^{\mathfrak{M}} \text{ } \mathfrak{M} \models \alpha[\nu \frac{a}{x}]).\end{aligned}$$