Logische Symbole

1.3 Definitionen von $\wedge$, $\vee$ und $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta) &= (\neg(\alpha \to (\neg\beta))),\\ (\alpha \vee \beta) &= ((\neg\alpha) \to \beta),\\ (\alpha \leftrightarrow \beta) &= ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)).\end{aligned}$$

Außerdem ist $\exists x\varphi = \neg\forall x(\neg\varphi)$.

Rang

1.10 Definition von $\mathrm{Rg}(\varphi)$:

(1) Wenn $\varphi \in \underline{Var}$, dann $\mathrm{Rg}(\varphi) = 0$,

(2) $\mathrm{Rg}(\neg\alpha) = \mathrm{Rg}(\alpha) + 1$,
$\mathrm{Rg}(\alpha \to \beta) = \max\{\mathrm{Rg}(\alpha), \mathrm{Rg}(\beta)\} + 1$.

Belegungen

2.2 Regeln für Belegungen $w : \underline{\underline{A}} \to \{0, 1\}$:

(1) $w(\neg\alpha) = 1 - w(\alpha)$,

(2) $w(\alpha \to \beta) = 1 - w(\alpha) + w(\alpha)w(\beta)$.

Regeln zum syntaktischen Beweisen

3.1 Hilbertaxiome: Die Axiome $\underline{\underline{H}}$ sind

(1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$,

(2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$,

(3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$.

3.2 Grundregeln für $\vdash$:

(1) **Anfangsregel:** $X \vdash \alpha$ für alle $\alpha \in X \cup \underline{\underline{H}}$,

(2) **Modus Ponens:** $X \vdash \alpha, \alpha \to \beta$, dann $X \vdash \beta$.

3.8 Deduktionstheorem: $X, \alpha \vdash \beta$ gdw. $X \vdash \alpha \to \beta$.

3.9 Wenn $X \vdash \alpha \to \beta, \beta \to \gamma$, dann $X \vdash \alpha \to \gamma$.

3.10 Wenn $X, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta$, dann $X \vdash \alpha$.

3.11 Es gilt $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$.

3.12 Es gilt $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$.

3.13 Wenn $X, \alpha \vdash \beta, \neg\beta$, dann $X \vdash \neg\alpha$.

3.14 Es gilt $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

3.15 Es gilt $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$.

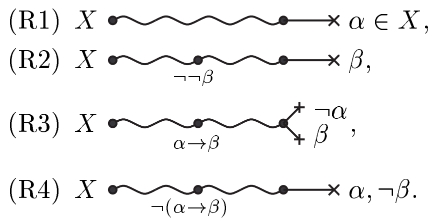
3.16 Wenn $X \vdash \neg(\alpha \to \beta)$, dann $X \vdash \alpha, \neg\beta$.

Tableaukalkül

5.1 Regeln für Tableauxfolgen:

(1) Anfangsregel (A): $\bullet X$,

(2) Für einen beliebigen Zweig:



Relationen

Eine Relation $S \subseteq A^2$ heißt

reflexiv, gdw. für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in S$,

antisymmetrisch, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
wenn $(a, b), (b, a) \in S$, dann $a = b$,

konnex, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
$(a, b) \in S$ oder $(b, a) \in S$ oder $a = b$,

irreflexiv, gdw. für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin S$,

symmetrisch, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
wenn $(a, b) \in S$, dann $(b, a) \in S$,

linear, gdw. für alle $a, b \in A$ gilt:
$(a, b) \in S$ oder $(b, a) \in S$,

transitiv, gdw. für alle $a, b, c \in A$ gilt:
$(a, b), (b, c) \in S$, dann $(a, c) \in S$.

freie Variablen

Für atomare Formeln α ist $\mathrm{frei}(\alpha) = \mathrm{var}(\alpha)$, für nicht atomare Formeln gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{frei}(\neg\alpha) &= \mathrm{frei}(\alpha),\\ \mathrm{frei}(\alpha \to \beta) &= \mathrm{frei}(\alpha) \cup \mathrm{frei}(\beta),\\ \mathrm{frei}(\forall x\alpha) &= \mathrm{frei}(\alpha) \setminus \{x\}.\end{aligned}$$

Regeln zum semantischen Beweisen in der Prädikatenlogik

7.2 Definition von $\mathfrak{M} \Vdash \varphi[\nu]$:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{M} \Vdash s \equiv t[\nu] && \text{gdw.} && \nu(s) = \nu(t),\\ &\mathfrak{M} \Vdash rt_1 ... t_n[\nu] && \text{gdw.} && (\nu(t_1), ..., \nu(t_n)) \in r^{\mathfrak{M}},\\ &\mathfrak{M} \Vdash (\neg\alpha)[\nu] && \text{gdw.} && \text{nicht } \mathfrak{M} \Vdash \alpha[\nu],\\ &\mathfrak{M} \Vdash (\alpha \to \beta)[\nu] && \text{gdw.} && (\mathfrak{M} \Vdash \alpha[\nu], \text{ dann } \mathfrak{M} \Vdash \beta[\nu]),\\ &\mathfrak{M} \Vdash (\forall x\alpha)[\nu] && \text{gdw.} && (\text{für alle } a \in I^{\mathfrak{M}}\ \mathfrak{M} \Vdash \alpha[\nu\tfrac{a}{x}]).\end{aligned}$$